高中数学竞赛中常用不等式的应用探索

◎ 舒艳平 / 余干中学　江西　上饶　335100

摘要:不等式是数学竞赛的热点之一。由于不等式的证明难度大,灵活性强,要求很高的技巧,常常使它成为各类数学竞赛中的“高档”试题。本论文就是围绕高中数学竞赛中出现频率最高的几个重要不定式 - - - 平均值不等式、柯西不等式及排序不等式展开的,主要从它们的应用题型、应用技巧、应用反思三方面去探索。

关键词:平均值不等式;柯西不等式;排序不等式;应用

1　导言

高中数学竞赛中常用的不等式涉及的主要是平均值不等式、柯西不等式及排序不等式。平均值不等式是一个基本且应用广泛的不等式,在许多不等式的证明中起基础推导作用;柯西不等式的结构对称优美,应用灵活广泛,且近年来一些高考数学试题也含有柯西不等式的背景;排序不等式同样结构优美、思想简单明了,便于记忆和理解,它也常常是证明其它不等式的基础。新课程将这三个不等式作为高中数学选修内容之一放在选修 4—5 不等式专题中,成为高中数学新增内容. 所以探究这三个不等式的应用是有益的。

2　平均值不等式

设 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in R^+$ 将

$$A_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\ ,\ G_n=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}\ ,\quad H_n=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\ ,\quad Q_n=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}$$

分别叫做这 n 个正数的算术平均数、几何平均数、调和平均数和平方平均数,则有 $H_n\leqslant G_n\leqslant A_n\leqslant Q_n$,当且仅当 $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n$ 等号成立。

2.1　平均值不等式的应用

例 1　求函数 $y=x^2+8x+\frac{64}{x^3}(x>0)$ 的最小值。

分析:虽然 $=x^2\times8x\times\frac{64}{x^3}=512$ (常数)。但是不存在实数 x 使得 $x^2=8x=\frac{64}{x^3}$ 成立,即不等式的等号无法取到。所以要考虑拆项,创造可以运用均值不等式的条件。

解:设 $\begin{cases}x^2.\left(\frac{8x}{m}\right)^{m}.\left(\frac{64}{nx^3}\right)^{n}=\text{常数}\\ x^2=\frac{8x}{m}=\frac{64}{nx^3}\end{cases}$,其中 $m,n\in N^+$

则有 $m+2-3n=0$,且 m,n 分别是 8,64 的因数 $\Rightarrow m=4,n=2$

$\therefore y=x^2+8x+\frac{64}{x^3}=x^2(2x+2x+2x+2x)+(\frac{64}{2x^3}+\frac{64}{2x^3})\geqslant 7.7\sqrt{x^2.(2x)^4.(\frac{32}{x^3})}=28$ 当且仅当 $x^2=2x=\frac{32}{x^3}$,即 $x=2$ 时等号成立。因此 $y_{\min}=28$。

技巧点拨:我们知道使各因式之和(或积)为定值是利用平均值不等式求最值的关键点. 其次,还要使各因式相等才能实现,即等号成立的条件必须满足,否则将导致错误,这也是使用均值不等式求最值的难点. 所以在运用时不仅要牢记它的三个条件“正、定、等”,还要善于根据均值不等式的结构特征,创造运用均值不等式的条件,而待定系数法(或参数法)就是其中常用的解题技巧。

例 2　已知 $\alpha,b,c\in R^+$, 求证:$\frac{(\alpha+1)^3}{b}+\frac{(b+1)^3}{c}+\frac{(c+1)^3}{\alpha}\geqslant\frac{81}{4}$

分析:由不等式的结构我们很自然会猜想 $\alpha=b=c=\frac{1}{2}$ 时等号成立,此条件确实使不等式成立,此时 $\frac{(\alpha+1)^3}{b}=\frac{(b+1)^3}{c}=\frac{(c+1)^3}{\alpha}=\frac{27}{4}$。

解:$\frac{(\alpha+1)^3}{b}+\frac{27b}{2}+\frac{27}{4}\geqslant\frac{27(\alpha+1)}{2}.....(1)$

$\frac{(b+1)^3}{c}+\frac{27c}{2}+\frac{27}{4}\geqslant\frac{27(b+1)}{2}.....(2)$

$\frac{(c+1)^3}{\alpha}+\frac{27\alpha}{2}+\frac{27}{4}\geqslant\frac{27(c+1)}{2}.....(3)$

(1) + (2) + (3) 得到 $\frac{(\alpha+1)^3}{b}+\frac{(b+1)^3}{c}+\frac{(c+1)^3}{\alpha}\geqslant\frac{81}{4}$

技巧点拨:此题不能如例 1 那样直接使用均值不等式,所以需要敏锐的观察力发现 $\alpha=b=c=\frac{1}{2}$ 时等号成立 ,然后由“等”的原则经过凑配得到三个不等式(1)(2)(3) ,相加后两边同时消去相同的项,整理后就得到原式。

例 3　对于 $n\in N^+$,求证:$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ 分析一:对原式稍作变形,则只需证 $1+\frac{1}{n+1}>(1+\frac{1}{n+1})^{\frac{n}{n+1}}$,因此要将 $1+\frac{1}{n+1}$ 拆分为 n+1 个正数之和。

解法一:

$$A_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\ ,\ G_n=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}\ ,\quad H_n=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\ ,\quad Q_n=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}$$

故而原式得证。

分析二:由 $G_n\le A_n$ 有 $a_1a_2\cdots a_n\le\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n$

比较原式,应使 $(\frac{1}{n+1})^n$ 变成 n+1 个正数的乘积。

解法二:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\times1\le\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\times n+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

技巧点拨:在需要时凑上因数 1,从而创设了使用均值不等式来证明原式的条件,这里的变形技巧值得借鉴。

3　柯西不等式

设 $\alpha_i,b_i\in R,i=1,2,...,n$,则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}\right)\ge\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\quad;\ \text{当且仅当}\ \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}\ \text{时等号成立。}$$

从运算的角度来看,就是“平方和的乘积不小于乘积和的平方” 。

3.1　柯西不等式的应用

例 1　设 $x_1,x_2,...,x_n\in R^+$ 且 $x_1x_2,...,x_n=1$

求

证：$\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n^2}{x_n+x_1}\geq\frac{n}{2}$

分析：观察此不等式左边是个数的平方和，而柯西不等式两边的结构是平方和的乘积与乘积和的平方，于是将所求问题与柯西不等式形成对接。

解：构造柯西不等式

$$\left(\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}+\cdots\frac{x_n^2}{x_n+x_1}\right)\left[(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+\cdots+(x_n+x_1)\right]$$

$$\geq(x_1+x_2+\cdots+x_n)^n\Rightarrow\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}\cdots\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n^2}{x_n+x_1}\geq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{2}$$

又由于 $x_1+x_2+\cdots+x_n\geq n\cdot\sqrt[n]{1}=n$，故而原式得证。

技巧点拨：若利用柯西不等式的一个常见变形：$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n}\geqslant\frac{(x_1+x_2+\ldots x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots y_n}(x_i\in R, y_i\in R^+, i=1,2\ldots n)$，则更易证明此题。

例 2 （2009 年全国高中数学联赛江苏赛区初赛题）

若不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant k\sqrt{2x+y}$ 对于任意的正实数 x，y 都成立，求 k 的范围.

分析：显然 $k>0$，所以将原式等价变形为：$k^2(2x+y)\geqslant(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

此式与柯西不等式变形的结构比较，只需稍微变形即可。

解：原式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant k\sqrt{2x+y}\Leftrightarrow k^2(2x+y)\geqslant(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

$$\text{又}\because 2x+y=\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{1}\geq\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\frac{1}{2}+1}\quad\Rightarrow\frac{3}{2}(2x+y)\geq(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

两边开平方即得：$\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{2x+y}\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}\ \Rightarrow\ k\geq\frac{\sqrt{6}}{2}$.

技巧点拨：将本题推广，可得到如下结论：

若不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant k\sqrt{mx+ny}$ 对于任意正实数 x，y 以及正整数 m、n 成立，则 $k\geqslant(\frac{\sqrt{mn(m+n)}}{mn})$.

4 排序不等式

设有两组数 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$；$b_1,b_2,\ldots,b_n$ 满足 $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\ldots\alpha_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_n$，

则有 $\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\ldots+\alpha_nb_n\geqslant\alpha_{i1}b_{j1}+\alpha_{i2}b_{j2}+\ldots+\alpha_{jn}b_{jn}\geqslant\alpha_1b_n+\alpha_2b_{n-1}+\ldots+\alpha_nb_1$，

当且仅当 $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n$ 或 $b_1=b_2=\ldots=b_n$ 时等号成立。

也可简称：同序和≥乱序和≥反序和

4.1 排序不等式的应用

例 1 证明契比雪夫不等式：

若 $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$；$b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_n$，

则 $\frac{1}{n}(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\geq\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\ldots b_n}{n}$

若 $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$；$b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n$，

则 $\frac{1}{n}(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\leq\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\ldots b_n}{n}$

分析：题中有明显的两组数 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$；$b_1,b_2,\ldots,b_n$，显然也是用排序不等式来证明。不等式左边出现了“正序和”及“反序和”，则右边理应是乱序和。尽管右边不是明显的“乱序和”形式，但只要将右式展开，就可得到多个乱序和。

解：根据排序不等式，有

$\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\ldots+\alpha_nb_n\geqslant\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\ldots+\alpha_nb_n$

$\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\ldots+\alpha_nb_n\geqslant\alpha_1b_2+\alpha_2b_3+\ldots+\alpha_nb_1$

……

$\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\ldots+\alpha_nb_n\geqslant\alpha_1b_n+\alpha_2b_1+\ldots+\alpha_nb_{n-1}$

将上述不等式两端分别相加，

$n(\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\ldots+\alpha_nb_n)\geqslant\alpha_1(b_1+b_2+\ldots+b_n)+\alpha_2(b_1+b_2+\ldots+b_n)+\ldots+\alpha_n(b_1+b_2+\ldots+b_n)$ 两边同除以，即得契比雪夫不等式的前半部分。

后半部分利用“反序和乱序和”即可证明。

技巧点拨：当两个数列大小成序且不等式一边是 $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ 的形式，就可考虑用排序不等式。这里多次使用了排序不等式，最终凑成了要证明的不等式的形式。

例 2 利用排序不等式证明：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\geq\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}\quad(a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n\in R^+)$$

分析：均值不等式从形式上看没有如前两例那样有明显的两个数组，所以要向着构造两个数组的目标努力，先变形为接近排序不等式的形式，再因势而循序渐进。

解：原不等式等价于证明 $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n\sqrt{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}}\geqslant n$，不放令 $b_i=\frac{\alpha_i}{n\sqrt{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}}$

则⇔ $b_1+b_2+\ldots+b_n\geqslant n$，由于 $b_1b_2\ldots b_n=1$，可再令，$b_1=\frac{x_1}{x_2}, b_2=\frac{x_2}{x_3},\ldots b_n=\frac{x_n}{x_1}$

且 $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n$，根据“乱序和≥反序和”

则有 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_n}{x_1}\geqslant\frac{x_1}{x_1}+\frac{x_2}{x_2}+\frac{x_n}{x_n}=n$

于是结论得证。

技巧点拨：这道题实现了两个“从无到有”，从无数组通过变形及换元到有一个数组之和 $b_1+b_2+\ldots+b_n$；从一个数组通过换元到两个数组且 $x_1,x_2,\ldots x_n$，与 $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots\frac{1}{x_n}$，从而顺理成章地利用排序不等式，体现了极强的技巧性。

参 考 文 献

[1] 刘诗雄. 高中数学竞赛辅导[M]. 陕西师范大学出版社,2000.

[2] 罗增儒. 高中数学竞赛辅导[M]. 陕西师范大学出版社,1999.

[3] 刘培杰. 数学奥林匹克试题背景研究[M]. 上海教育出版社,2006.

[4] 葛军. 新编高中数学竞赛教程[M]. 河南大学出版社,2001.

[5] 陈传理. 高中数学竞赛名师指导[M]. 华中师范大学出版社,2001.

[6] 张伟,李娜. 均值不等式在竞赛数学中的应用[J]. 中学数学研究,2009,10.

[7] 陈江. 应用均值不等式巧解竞赛题 [J]. 数学教学研究,2010,53.

[8] 沈华,刘合国. 排序不等式对几道 IMO 试题的应用[J]. 中学数学,2001,8.

[9] 张志峰. 排序原理教学的几点想法[J]. 中学数学研究,2010,8.

[10] 李歆. 巧用柯西不等式的变式解竞赛题[J]. 中学数学教育,2010,12.